

13/12

Έστω $f, g \in B(A, \mathbb{R})$ $\forall x \in A$ ισχύει

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_1 + M_2 = M \quad \text{οπου } M \in \mathbb{R}$$

$$\sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| < +\infty$$

Ορίσμε $\forall f, g \in B(A, \mathbb{R})$ $\hat{P}_u : B(A, \mathbb{R}) \times B(A, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f, g \in B(A, \mathbb{R}) \quad \hat{P}_u(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$$

Η $\hat{P}_u$ είναι μία τετραπλή σζων $B(A, \mathbb{R})$

$$i) \hat{P}_u(f, g) \geq 0 \quad \forall f, g$$

$$ii) \hat{P}_u(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| = 0 \Leftrightarrow |f(x) - g(x)| = 0 \quad \forall x \in A$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad \forall x \in A \Leftrightarrow f = g \quad \text{σζ } A$$

$$iii) \hat{P}_u(f, g) = \hat{P}_u(g, f)$$

$$iv) \hat{P}_u(f, g) \leq \hat{P}_u(f, h) + \hat{P}_u(h, g) \quad \forall f, g, h \in B(A, \mathbb{R})$$

Ορίσμε $\forall f \in B(A, \mathbb{R})$ $\|f\| : B(A, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad \|f\| = \hat{P}_u(f, 0)$

Η $\| \cdot \|$ αποτελεί μία οριζή για ζων $B(A, \mathbb{R})$

$$i) \|f\| \geq 0 \quad \forall f \in B(A, \mathbb{R})$$

$$ii) \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

$$iii) \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$$

$$iv) \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Για ζς τετραπλές P_u και $\hat{P}_u$ σζων $B(A, \mathbb{R})$ ισχύει οε
είναι ισοδύναμες δηλ. $P_v \xrightarrow{P_u} f \Leftrightarrow P_v \xrightarrow{\hat{P}_u} f$

Απόδειξη

Έσζ οε $P_v \xrightarrow{P_u} f$ ζόρε $P_u(P_v, f) \rightarrow 0 \Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0 \quad \exists \epsilon < 1) (\exists v_0 \in \mathbb{N}) : \forall v \geq v_0 \Rightarrow |P_u(P_v, f) - 0| < \epsilon < 1$$

$$\Rightarrow (\forall \epsilon > 0 \quad \exists \epsilon < 1) (\exists v_0 \in \mathbb{N}) \quad \forall v \geq v_0 \Rightarrow \min \{1, \sup_{x \in A} |P_v(x) - f(x)|\} < \epsilon < 1$$

$$\Rightarrow (\forall \epsilon > 0 \quad \exists \epsilon < 1) (\exists v_0 \in \mathbb{N}) \quad \forall v \geq v_0 \Rightarrow \sup_{x \in A} |P_v(x) - f(x)| < \epsilon \Leftrightarrow P_u(P_v, f) \rightarrow 0$$

Πρόταση

$O(B(A, \mathbb{R}), \hat{P}_u)$ είναι ολίσπος

τετραπλός χώρος

Απόδειξη οίον

Απόδειξη

Έστω $(f_v) \in B(A, \mathbb{R})$ με (f_v) βασική ως προς $\hat{p}_u$

Έστω $\varepsilon > 0$ με $\varepsilon < 1$ τότε $(\exists v_0): \forall v, t \geq v_0 \Rightarrow p_u(f_v, f_t) < \varepsilon < 1$

δηλ. $\forall v, t \geq v_0 \Rightarrow \sup_{x \in A} |f_v(x) - f_t(x)| < \varepsilon < 1$

$\forall v, t \geq v_0 \Rightarrow \min\{1, \sup_{x \in A} |f_v(x) - f_t(x)|\} < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall v, t \geq v_0 \Rightarrow p_u(f_v, f_t) < \varepsilon$ Άρα (f_v) βασική ακολουθία ως προς p_u στον $B(A, \mathbb{R})$. Άρα $\exists f \in B(A, \mathbb{R}): p_u(f_v, f) \rightarrow 0$
 $\Leftrightarrow \hat{p}_u(f_v, f) \rightarrow 0$

Παρατηρήσεις

1) Ο $B(A, \mathbb{R})$ είναι γραμμικός υποχώρος του $F(A, \mathbb{R})$ διότι

i) αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in B(A, \mathbb{R})$ έχουμε $\forall x \in A$

$$|\lambda f(x)| \leq |\lambda| |f(x)| \leq |\lambda| \cdot M = M' > 0$$

ii) Εάν $f, g \in B(A, \mathbb{R})$ τότε $(\forall x \in A)$:

$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_1 + M_2 = M_3 > 0$$

2) Εάν $U(A, \mathbb{R}) = F(A, \mathbb{R}) \setminus B(A, \mathbb{R})$ τότε $U(A, \mathbb{R})$ είναι το σύνολο των μη φραγμένων συναρτήσεων $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Ο $U(A, \mathbb{R})$ ΔΕΝ είναι γραμμικός υποχώρος του $F(A, \mathbb{R})$ διότι αν $f \in U(A, \mathbb{R})$ τότε $-f \in U(A, \mathbb{R})$ και $-f + f = 0$ όπου $0 \in B(A, \mathbb{R})$

• Το $U(A, \mathbb{R}) \subseteq F(A, \mathbb{R})$ οπότε με τον περιορισμό της p_u στον $U(A, \mathbb{R})$ έχουμε ότι $(U(A, \mathbb{R}), p_u)$ είναι μετρικός υποχώρος του $F(A, \mathbb{R})$

• Προσοχή η μετρική $\hat{p}_u$ ΔΕΝ μπορεί να οριστεί στο σύνολο $U(A, \mathbb{R})$ διότι οι συναρτήσεις είναι ΜΗ φραγμένες και το Sup μπορεί να ΜΗΝ είναι πραγματικός

Πρόταση

Ο $(U(A, \mathbb{R}), p_u)$ είναι κλειστός μετρικός υποχώρος $(F(A, \mathbb{R}), p_u)$

Απόδειξη ούρα

Ανάλυση

Έστω $(f_n) \subseteq U(A, \mathbb{R})$ και $f_n \xrightarrow{p_u} f$ όπου $f \in F(A, \mathbb{R})$

Θ.δ.ο. $f \in U(A, \mathbb{R})$

Έστω ότι αυτό δε ισχύει, δηλ. έστω ότι $f \notin B(A, \mathbb{R})$

τότε δε υπάρχει $M > 0$ $\equiv |f(x)| \leq M \quad \forall x \in A$

Επιπλέον εφόσον $f_n \xrightarrow{p_u} f$ δε υπάρχει $v_0 \in \mathbb{N} \equiv p_u(f_{v_0}, f) < \frac{1}{2}$
 $\forall v \geq v_0$

ή $\min\{1, \sup_{x \in A} |f_v(x) - f(x)|\} < \frac{1}{2} \quad \forall v \geq v_0$

$\sup_{x \in A} |f_v(x) - f(x)| < \frac{1}{2} \quad \forall v \geq v_0$ οπότε $|f_{v_0}(x) - f(x)| < \frac{1}{2} \quad \forall x \in A$

Άρα $\forall x \in A$ έχουμε:

$$|f_{v_0}(x)| = |f_{v_0}(x) - f(x) + f(x)| \leq |f_{v_0}(x) - f(x)| + |f(x)| \\ \leq \frac{1}{2} + M \text{ δηλ. } (f_{v_0}) \text{ φραγμένη έτι περ}$$

Κριτήριο Οφειδότητας Σειράς

Εάν $f_n \xrightarrow{p_u} f$ και (f_n) ακολουθία τη φραγμένων συναρτήσεων
και f φραγμένη έπεται ότι η σειρά ΔΕΝ είναι οφειδότητα

Ασκηση

Να εξετασθεί ως προς την οφειδότητα σειρά η
ακολουθία $f_v(x) = \frac{1}{\sqrt{v}x}, x > 0$

Λύση

Εάν $v \in \mathbb{N}$ τότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_v(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{v}x} = +\infty$

Άρα κάθε f_v είναι τη φραγμένη στο $(0, +\infty)$

$(f_v) \subseteq U((0, +\infty), \mathbb{R})$. Όμως $\lim_{v \rightarrow \infty} f_v \xrightarrow{p_u} 0$ και $0 \in B((0, +\infty), \mathbb{R})$

Άρα η σειρά δεν είναι οφειδότητα.

Παρατηρήσεις

1) Τα σύνολα $B(A, \mathbb{R})$ και $U(A, \mathbb{R})$ είναι κλειστά υποσύνολα
του $F(A, \mathbb{R})$. Επίσης κάθε ένα από αυτά είναι
συντηρημένα του άλλου. Επομένως, είναι και ανοιχτά του
 $F(A, \mathbb{R})$. Άρα εφόσον $F(A, \mathbb{R}) = B(A, \mathbb{R}) \cup U(A, \mathbb{R})$

Άρα $F(A, \mathbb{R})$ δεν είναι συνεκτικό

2) Ο $(U(A, \mathbb{R}), p_u)$ είναι πλήρης, π.χ. ως κλειστό
υποσύνολο του $(F(A, \mathbb{R}), p_u)$.

Άσκηση

Να εξεταστεί ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση η εστωμένη
 $f_v(x) = v + \frac{1}{x} - |v - \frac{1}{x}|$, $x \in (0, 1]$

Λύση

- Για $x \in (0, \frac{1}{v}]$ έχουμε $f_v(x) = v + \frac{1}{x} - (\frac{1}{x} - v) = 2v$
- Για $x \in (\frac{1}{v}, 1]$ έχουμε $f_v(x) = v + \frac{1}{x} - v + \frac{1}{x} = \frac{2}{x} < 2v$
- Άρα $(f_v)_v$ είναι μια ακολουθία φρετ. συναρτήσεων στο $(0, 1]$
- Αν $f(x) = \frac{2}{x}$, $x \in (0, 1]$ τότε $f_v \xrightarrow{ε.σ.} f$ αλλά $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
- Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη

Άσκηση

Να εξεταστεί ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση η
 $f_v(x) = (1 + \frac{x}{v})^v$, $x \geq 0$

Λύση

- Εάν $f(x) = e^x$, $x \geq 0$ τότε $f_v \xrightarrow{ε.σ.} f$ στο $[0, +\infty)$
- Εάν $f_v \rightarrow f$ ομοιόμορφα τότε $P_n(f_v, f) \rightarrow 0$
- δηλ. $(P_n(f_v, f))_v$ φρετ. ένη αλλά $|f_v(v) - f(v)| = |2^v - e^v| = e^v - 2^v = 2^v((\frac{e}{2})^v - 1)$: $\lim_{v \rightarrow \infty} |f_v(v) - f(v)| = +\infty$
- $P_n(f_v, f) = 1 \neq 0$. ΑΡΑ η σύγκλιση ΔΕΝ είναι ομοιόμορφη.

Συνεχής Συναρτήσεις

Έστω $f \in F(A, \mathbb{R})$ και $x \in A$. Θα λέμε ότι η f είναι
συνεχής στο x αν $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\epsilon, x) > 0)(\forall y \in A): |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

- Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο A , αν σε
παραπάνω ισχύουν για όλα τα $x \in A$ δηλ.

$$(\forall x \in A)(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\epsilon, x) > 0)(\forall y \in A): |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

▷ Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A εάν

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0)(\forall x, y): |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Πρόταση

Φανερό, εάν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής είναι
και συνεχής

Συμπεράσματα

$C(A, \mathbb{R})$: σύνολο των συνεχών συναρτήσεων

$C_u(A, \mathbb{R})$: σύνολο των ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων

Ισχύει $C_u(A, \mathbb{R}) \subseteq C(A, \mathbb{R}) \subseteq F(A, \mathbb{R})$.

Το $C_u(A, \mathbb{R})$ επίσης είναι γνήσιο υποσύνολο του $C(A, \mathbb{R})$ (εάν A δεν είναι κλειστό και φραγμένο).

Πχ

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(x) = x^2$.

Η f είναι συνεχής στο $(\mathbb{R}, 1.1)$ (ως πολυωνυμική).

Ο.δ.ο. δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής.

$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0)(\forall x, y \in \mathbb{R}) : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Έστω $\epsilon = 1$, και $x = y + \frac{\delta}{2}$ τότε

$$|x - y| = |y + \frac{\delta}{2} - y| = \frac{\delta}{2} < \delta \quad \text{άρα}$$

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(y + \frac{\delta}{2})^2 - y^2| = |y\delta + \frac{\delta^2}{4}|. \quad \text{Λέει } y = \frac{1}{\delta}$$

τότε $|f(x) - f(y)| = |1 + \frac{\delta^2}{4}| > 1$. Άρα f ΔΕΝ είναι ομ. συν. στο $\mathbb{R}$

Πρόταση

Το $C(A, \mathbb{R})$ είναι κλειστό υποσύνολο του $(F(A, \mathbb{R}), p_u)$ επίσης

$C_u(A, \mathbb{R})$ είναι κλειστό υποσύνολο του $(F(A, \mathbb{R}), p_u)$

Απόδειξη

• Για το $C(A, \mathbb{R})$.

Έστω $(f_n) \subseteq C(A, \mathbb{R})$ και $f_n \xrightarrow{p_u} f$, $f \in F(A, \mathbb{R})$.

Επίσταν $f_n \xrightarrow{p_u} f$, εάν $\epsilon > 0$ $\exists \epsilon \in \mathbb{I}$, $\exists v_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq v_0 \Rightarrow p_u(f_n, f) < \frac{\epsilon}{3}$

Άρα $\forall n \geq v_0 \Rightarrow \min \{1, \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|\} < \frac{\epsilon}{3} < 1$

Άρα $\forall n \geq v_0 \Rightarrow \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad (1)$ οπότε $\sup_{x \in A} |f_{v_0}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$

Επίσταν f_{v_0} συνεχής στο A . Έστω $x \in A$.

Η f_{v_0} δε είναι συνεχής στο x οπότε

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) : |x - y| < \delta \Rightarrow |f_{v_0}(x) - f_{v_0}(y)| < \frac{\epsilon}{3} \quad (2)$$

οότε $(\forall y \in A) : |x - y| < \delta \Rightarrow |x_0 - y| < \varepsilon$

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f_{v_0}(x) + f_{v_0}(x) - f_{v_0}(y) + f_{v_0}(y) - f(y)|$$

$$\leq |f(x) - f_{v_0}(x)| + |f_{v_0}(x) - f_{v_0}(y)| + |f_{v_0}(y) - f(y)|$$

$$\leq \sup_{x \in A} |f(x) - f_{v_0}(x)| + |f_{v_0}(x) - f_{v_0}(y)| + \sup_{x \in A} |f_{v_0}(y) - f(y)|$$

(εσ (1) & (2)) : $< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Άρα f συνεχής στο x , εφόσον το παραπάνω ισχύει
 $\forall x \in A$, $\exists x_0 - \varepsilon$ οπ f συνεχής στο A

Κριτήριο ομοιόμορφης συνέχειας

Αν $(f_v) \subseteq C(A, \mathbb{R})$ και $f_v \xrightarrow{f.s.} f$ και η f δεν είναι
 συνεχής στο A τότε η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη

Άσκηση

Να εξετασθεί ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση
 η $f_v(x) = \min\{1, e^{vx}\}$, $x \in \mathbb{R}$

Λύση

- Αν $x < 0$ τότε $f_v(x) = e^{vx}$ και $\lim_{v \rightarrow \infty} f_v(x) = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{v(-x)}} = 0$
- Εάν $x \geq 0$ τότε $f_v(x) = 1$. Συνεπώς $\lim_{v \rightarrow \infty} f_v \stackrel{f.s.}{=} 1$, $x \geq 0$

Αν $f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$ τότε $f_v \xrightarrow{f.s.} f$

Η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Άλλε $f_v(x) = \begin{cases} e^{vx} & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_v(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{vx} = \lim_{x \rightarrow 0^-} f_v(x)$

Άρα f_v συνεχής $\forall v \in \mathbb{N} \Rightarrow$ ΟΧΙ ομοιόμορφη σύγκλιση

Άσκηση

Να εξετασθεί ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση
 η $f_v(x) = \sin^4(\sin x)^v$, $x \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}$

Λύση

Λύση

• Εάν $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ τότε

$$f_v(x) = \sin^4(1)^v = \sin^4 1 \rightarrow \sin^4 1$$

• Εάν $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ τότε $|\sin x| < 1$ οπότε $\lim (\sin x)^v = 0$
και $f_v(x) = \sin^4 0 = 0$

$$\text{Έστω } f(x) = \begin{cases} \sin^4 1 & , x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & , x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Αλλά $\forall v$ η f_v συνεχής ως σύνθεση συνεχών

Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη